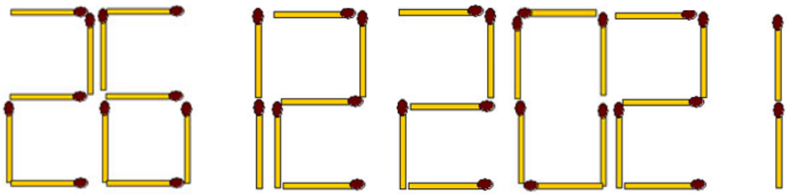
# Математичне гніздо
# VIII командний конкурс-гра

**м. Київ** **26 грудня 2021 р.**

## Умови і розв’язки задач

**1.** Перекладіть не більше ніж 5 сірників так, щоб утворився паліндром (числовий паліндром - це натуральне число, яке читається зліва направо й справа наліво однаково).
*(Сіваченко І.)*



**Розв’язок**. Можна, наприклад, перенести цифру 1 з середини в найстарший розряд, а цифру 6 перетворити на цифру 0. Інший спосіб: цифру 6 перетворити на цифру 0, а сірниками із цифр 1 доповнити дві цифри 2 до цифр 8.

**2.** Чому дорівнює **H**+**A**+**P**+**P**+**Y**+**N**+**E**+**W**+**Y**+**E**+**A**+**R**+**!**, якщо **H**×**A**×**P**×**P**×**Y**=**N**×**E**×**W**×**Y**×**E**×**A**×**R**×**!**, де різні знаки - різні ненульові цифри?
*(Ціхоцька Д.)*

**Розв’язок**. Оскільки дільники 5 і 7 не повторюються серед одноцифрових натуральних чисел, то букви A і Y, що повторюються з обох боків рівності, відповідають цифрам 5 і 7. Букв P та E повтрються кожна з одного боку рівності Перебираючи варіанти для них з огляду на кількості дільників 2 і 3, отримуємо, що букви P та E можуть відповідати лише числам 4 і 8. Остаточно $9\cdot5\cdot8\cdot8\cdot7 = 2\cdot4\cdot6\cdot7\cdot4\cdot5\cdot3\cdot1$
Тоді H+A+P+P+Y+N+E+W+Y+E+A+R+! = 45+8+4+5+7 = 69.
**Відповідь**: H+A+P+P+Y+N+E+W+Y+E+A+R+! = 45+8+4+5+7 = 69.

**3.** Цербер мав 3 голови. Якщо йому відтяти голову, то замість неї виросте 5 нових голів. Скільки голів відрубали Церберу, якщо зараз він має 23 голови?
*(фолькльор)*

**Розв’язок**. Кожне відтинання збільшує кількість голів Цербера на 5 – 1 = 4. Кількість голів збільшилась на 23 – 3 = 20. Отже було 20 : 4 = 5 відтинань.
**Відповідь**: Церберу відрубали 5 голів.

**4.** В родині Неабияких всі хлопчики завжди говорять правду, а дівчатка завжди фантазують. Хтось з 4-х дітей пофарбував кота у тигра.

Саша: «Це хтось із хлопчиків».
Женя: "Це Валя!"
Вася: «Серед нас хлопчиків більше».
Валя: «Ми з Сашею – дівчатка!».

Так хто ж пофарбував кота? (Всі імена можуть носити як хлопчики, так і дівчатка)
*(Скаклíньова Е.)*

**Розв'язок**. Хлопчики говорять правду, тому із Валіного висказування слідує, що Валя – дівчинка, але тоді Саша – може бути лише хлопчиком. Із Сашиного висказування слідує що кота пофарбував хлопчик, тоді Женя фантазує і вона – дівчинка, а отже і Вася фантазує і вона теж дівчинка. Єдиний хлопчик – Саша, він і пофарбував кота.
**Відповідь**: кота пофарбував Саша.

**5.** Мама-ведмедиця зробила до свята Нового року три торти: ведмежаткові з кремом, собі з джемом , а татові-ведмедю з кремом і джемом; верхні коржі всіх тортів мама вкривала тільки шоколадною глазур'ю. На торт тата пішло 9 коржів, коржі кремом і джемом були змащені по черзі. На торт мами пішло 5 коржів, а на торт ведмежатка - 3 коржі. Торт ведмежатка вийшов втричі легший, ніж у тата. Джему мама витратила 1 кг, а крему усього втричі більше, ніж шоколаду. Скільки шоколаду знадобилось мамі-ведмедиці на три торти, якщо вона дуже старанний кондитер і всі шари кожної начинки у неї однакові? Боки тортів вона не обмазувала, форму для коржів використовувала одну й ту саму.
*(Юдіна Н.)*

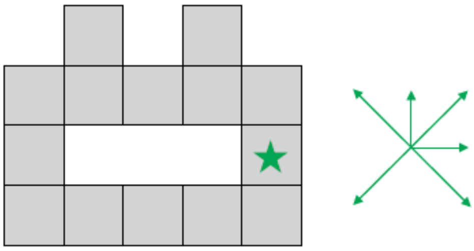
**Розв'язок**. Позначимо вагу коржа буквою Х, вагу кожного шару шоколаду – Ш, крему – К, джему – Д, а вагу маленького торта – М. Тоді можна записати для трьох тортів:
Ш + 2К + 3Х = М => 3Ш + 6К + 9Х = 3М; (1)
Ш + 4Д + 5Х = мамин торт;
Ш + 4К +4Д + 9Х = 3М; (2)
Порівнюючи (1) і (2) отримаємо: 2Ш + 2К = 4Д.
Враховуючи, 8Д = 1 *кг* і 6К = 3·3Ш, отримаємо: 5Ш = 4Д = 0,5 *кг* => Ш = 0,1 *кг*. Отже, всього знадобилось 3Ш = 0,3 *кг* шоколаду.
**Відповідь**: знадобилось 0,3 *кг* шоколаду.

**6.** Оленята Санти влаштували перегони. Стартували вони в такому порядку: Комет, Денсер, Рудольф, Віксен. Кожен раз, коли один олень обганяв іншого, ельфи били у дзвони: всього пролунало 28 дзвонів. Після фінішу з'ясувалось, що Віксен обігнала 8 разів, а її обігнали 7; Рудольф обігнав когось 4 рази; Денсер був обігнаний 7 разів і сам випередив когось 7; а Комет пам'ятає тільки, що його обігнали 12 разів. В якому порядку фінішували оленята? (можна: Скільки разів Комет обігнав суперників і скільки раз обігнали Рудольфа?)
*(Юдіна Н.)*

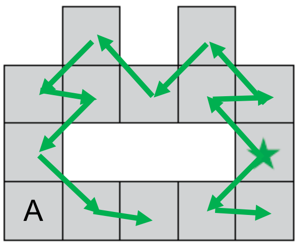
**Розв'язок 1**. Дзвони пролунали 28 раз, це означає, що було 28 обгонів: хтось обігнав 28 разів і когось обігнали 28 разів. Знаходимо дані, яких не вистачає: Комет обігнав 9 разів (28-8-4-7=9), Рудольфа обігнали 2 рази (28-12-7-7=2). Подивимось, на скільки позицій змінилась позиція кожного оленя: Рудольф просунувся вперед на 2 позиції, бо він обігнав на 2 рази більше, ніж його (тобто з 3 на 1 місце); Комет просунувся на 3 позиції назад (з 1 місця на 4) ; Денсер залишився на своєму місці; у Віксен обгонів на 1 більше, ніж обігнали її, тобто вона просунулась на 1 позицію вперед.

**Розв'язок 2**. Запишемо наскільки могло змінитись місце у порядку слідування кожного оленяти: Віксен: 4 – 8 + 7 = 3; Рудольф: 0 < 3 – 4 + Р =Р – 1 < 5; Денсер: 2 – 7 + 7 = 2; Комет: 0 < 1 – К + 12 =13 – К < 5. Звідки отримаємо: 1 < Р < 6; 8 < К < 13. Крім того, кожний обгін збільшує порядкове місце одного з оленят на 1 і зменшує на 1 порядкове місце іншого з оленят, то сума всіх обгонів, взятих із відповідним знаком дорівнюватиме нулю: – 8 + 7 – 4 + Р – 7 + 7 – К + 12 = 0. Тобто К – Р = 7. Також сумарна кількість всіх обгонів взятих без знака дорівнює подвоєній кількості дзвонів: 8 + 7 + 4 + Р + 7 + 7 + К + 12 = 56. Тобто К + Р = 11. Звідки отримуємо К = 9, Р = 2 і знаходимо місце Рудольфа: Р – 1 = 1 і Комет: 13 – К = 4.

**Відповідь**: Оленята фінішували у порядку: Рудольф, Денсер, Віксен, Комет.



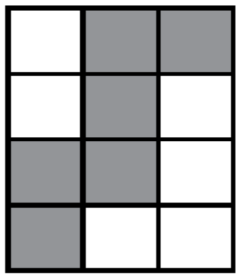
**7.** Робот R2D2 стоїть у клітинці, позначеній зірочкою. Він може переходити з клітинки до сусідньої клітинки у будь-якому напрямку, який показують стрілочки на малюнку праворуч. У скількох клітинках лабіринту він не зможе побувати?
*(Смарт- Кенгуру)*




**Розв'язок**. Оскільки немає стрілки для горизонтального ходу вліво і вертикального ходу в них, то в клітинку А робот потрапити не зможе. Можна перевірити, що у всі інші клітинки робот потрапити зможе.

**Відповідь**: робот не зможе побувати у одній клітинці лабіринту.

**8.** На кожній клітинці квадрата 3×3 робот R2D2 збудував башту з кубиків. Кожна вежа або складається з одного кубика, або в ній чорні та білі кубики чергуються. Скільки кубиків використав робот, якщо спереду вежа виглядає так, як показано на малюнку?
*(Смарт- Кенгуру)*

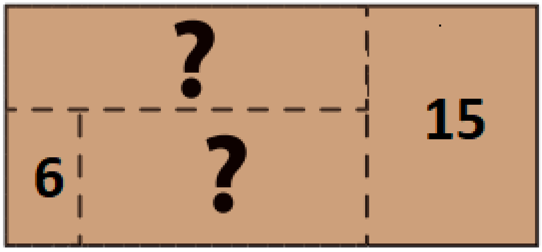


**Розвязок**. Оскільки в кожній вежі кубики чергуються, то там, де один над іншим йдуть два однакових кубика – ми бачимо різні вежі. У кожному стовпчику по два повтори кольору, тому у всіх трьох стовпчиках ми бачимо верхні кубики кожної з трьох веж. Відповідно у лівому стовпчику висоти веж – 1, 3, 4; у середньому – 2, 3, 4; у правому – 1, 2, 4. Остаточно використано 24 кубики.

**Відповідь**: робот використав 24 кубики.

**9.** Яся розламала велику шоколадку, складену з однакових маленьких квадратиків на чотири частини так, щоб в одній із них було 6 квадратиків, в іншій 15 квадратиків, а ще в двох

невідомо скільки, але однакова кількість (дивись схематичний малюнок). Якого розміру могла бути шоколадка?
*(фолькльор)*




**Розв'язок**. Нехай верхня-ліва частина має висоту А і довжину Б, нижня-середня – висоту В і довжину Г. Тоді Б > Г ⇒ В > А; А × Б = В × Г; (Б – Г) × В = 6 і 1 < (А + В) є дільником числа 15. Цим умовам задовольняють два випадки: (1) Б – Г = 2; В = 3; А = 2 ⇒ Б = 6; Г = 4 і довжина шоколадки 9, висота – 5. (2) Б – Г = 3; В = 2; А = 1 ⇒ Б = 6; Г = 3 і довжина шоколадки 11, висота – 3.
**Відповідь**: шоколадка могла бути 5 × 9 або 3 × 11.

**10.** Вова та Дмитро, будучі захоплені теорією ймовірностей, по черзі кидали гральну кістку, на якій випадає від 1 до 6 очок. Першим кидав кістку Вова і в нього за будь-яких шість послідовних кидків випадала щонайменше чотири рази шістка. Дмитру не щастило: серед будь-яких трьох його послідовних кидків випадали хоча б один раз двійка, а серед будь-яких п'яти послідовних кидків – одна одиниця. Вигравав той, хто першим набрав більше 57 очок. Хто виграв у цій грі?
( з Творчого конкурсу вчителей математики)
**Розв'язок**. Виграє Дмитро, якщо йому дуже пощастить, а саме:
66261266216266. За 14 ходів сума 58. А у найгіршому випадку Вова за 14 ходів може отримати: 11666611666611, тобто сума 54 .
В інших випадках перемагає Вова, приклад легко побудувати
**Відповідь**: виграє Дмитро або Вова.

**11.** На планеті «Новорічна зірка» рік складається із цілого числа однакових за тривалістю місяців, місяць – із цілого числа однакових за тривалістю тижнів, а тиждень – із цілого числа однакових за тривалістю діб. Отже, в році - 35 тижнів, а в місяці – 77 діб. Скільки діб в році на планеті «Новорічна зірка»?
*(Бєльчіков Е.)*

**Розв'язок**. Нехай у році М місяців, у місяц Т тижнів, а у тижні Д діб. Тоді: М·Т = 35, а Т·Д = 77. Тоді числа 35 і 77 діляться на Т, а отже, Т може дорівнювати 1 або 7. У першому випадку кількість днів у році М·Т·Д = 35·77 = 2695, але у цьому випадку місяць дорівнює тижню, що протирічить здоровому глузду. У другому випадку кількість днів у році М·Т·Д = 5·7·11 = 385.
**Відповідь**: на планеті «Новорічна зірка» у році 385 діб.

**12.** Деяке чотирицифрове число націло поділили на 3, частку записали у трійковій системі числення, у отриманого числа стерли першу і останню цифри. В результаті отримали запис початкового числа. Що це за число? (наприклад, число в трійковій системі $102 = 1·3^2 + 0·3^1 + 2·3^0 = 11$ в десятковій системі)
*(Шлапак Ю.)*

**Розв'язок**. Позначимо цифри шуканого числа: А, Б, В, Г, а стерті цифри трійкового числа Х і У. Тоді згідно умові всі ці цифри приймають значення менше 3, А і Х більше 0 і 1000А+100Б+10В+Г=729Х+243А+81Б+27В+9Г+3У. Тобто, 757А–729Х=17В+8Г+3У-19Б<56

(17·2+8·2+3·2-19·0). Тому, А=Х. При А=1: 28=17В+8Г+3У-19Б виконується при В=Г=У=1, Б=0. При А=2: 56=17В+8Г+3У-19Б виконується при В=Г=У=2, Б=0.
**Відповідь**: Це число 2022 або 1011.

**13.** У Зимовій математичній школі на конкурс «Математичне гніздо» записались 6 команд. Для конкурсу журі запропонувало 8 задач, причому вирішили за розв'язання кожної із задач присуджувати різну кількість балів. Таблиця результатів показана на малюнку нижче. Чи могло виявитись, що всі команди набрали порівну балів? *(Шлапак Ю.)*

| команда | № задачі | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| Алгебрянські | + | | | + | | + | + | |
| Біноменки | + | + | | | | | + | + |
| Відсоткуваті | + | + | + | | + | | + | |
| Геометровські | + | | + | | | + | | + |
| Дільниченки | + | | | + | + | | | + |
| Евклідники | + | + | | + | + | + | | |

**Розв'язок**. Можна помітити, що якщо за кожну задачу присуджували кількість балів, що дорівнює порядковому номеру задачі, то всі команди набрали порівну по по 18 балів.
**Відповідь**: могло виявитись, що всі команди набрали порівну балів.

**14.** Здогадайся, чого не вистачає на святковому солодкому столі Цифри:


*(Юдіна Н.)*

**Розв'язок 1**. Порахуємо кількість букв у назвах солодощів. Сума кількості літер в повних стовпчиках і рядочках є 21, тобто ми маємо магічний квадрат з магічним числом 21. У центрі нашої таблички не вистачає сімки. Серед запропонованих варіантів відповідей 7 літер має тільки МАКАРУН.

| | | |
|---|---|---|
| 8 | 3 | 10 |
| 9 | ? | 5 |
| 4 | 11 | 6 |

**Відповідь**: макарун.