

XXVI Всеукраїнська заочна математична олімпіада “5–12”

В олімпіаді може взяти участь кожен учень 5 – 12 класів. Наполегливо радимо потренуватися та випробувати свої здібності всім претендентам на участь в обласних та Всеукраїнській олімпіадах, а також відбіркових змаганнях на Міжнародну математичну олімпіаду.

Розв’язання задач слід надсилати до 25 лютого 2022 року (за поштовим штемпелем) на адресу

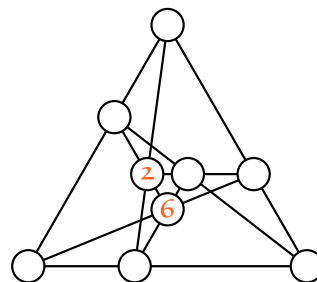
01601 МСП, Київ,

Київський національний університет ім. Тараса Шевченка
механіко-математичний факультет
кафедра математичного аналізу
“Олімпіада 5-12”

або у відсканованому вигляді на електронну адресу olymp5-12@ukr.net.

Підсумки олімпіади буде підведено наприкінці березня на сайті

<http://www.mechmat.univ.kiev.ua>.



XXVI Всеукраїнська заочна математична олімпіада “5 – 12”

Умови задач

1. Чи існує таке натуральне число $n > 2022$, що кожне з чисел $n - 1$, n та $n + 1$ ділиться на свою суму цифр?
2. У Малюка і Карлсона була однакова кількість булочок. Карлсон з’їв у чотири рази більше булочок, ніж Малюк, і у них разом залишилося 8 булочок. Скільки булочок було у Карлсона спочатку?
3. На дошці 9×9 пофарбували декілька клітинок так, що у кожному рядку та у кожному стовпчику пофарбовані рівно дві клітинки. Чи обов’язково на дошці знайдеться квадрат 2×2 без пофарбованих клітинок?
4. Вздовж доріжки ростуть 80 квіток. Серед будь-яких чотирьох послідовних квіток принаймні одна червона, а серед будь-яких п’яти послідовних квіток не більше однієї лілії. Довести, що принаймні 10 червоних квіток не є ліліями.
5. Впишіть у кружечки на емблемі олімпіади числа 1, 3, 4, 5, 7, 8 і 9 так, аби утворилася найбільша можлива кількість рядів по три числа з однаковою сумою.
6. Про ціле число n відомо, що $7n + 1$ — квадрат цілого числа. Довести, що $n + 1$ є сумою 7 квадратів цілих чисел.
7. Нехай I — центр кола, вписаного у трикутник ABC , в якому $\angle BAC = 60^\circ$ та $AB \neq AC$. На променях BA та CA відмітили точки D та E так, що $BD = CE = BC$. Довести, що пряма DE проходить через точку I .



8. Кожен учень школи відвідав за рік не менше п'яти онлайн-екскурсій. Для будь-яких двох екскурсій існує не більше одного учня, який був на обох цих екскурсіях. Довести, що знайдуться п'ять екскурсій, на яких побувала однакова кількість учнів.

9. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} x + [y] + \{z\} = 1,2, \\ \{x\} + y + [z] = 3,4, \\ [x] + \{y\} + z = 5,6, \end{cases}$$

де $[t]$ та $\{t\}$ — ціла та дробова частини числа t .

10. Знайти всі прості числа $p \geq 3$ з такою властивістю: для кожного простого числа $q < p$ остача від ділення p на q не ділиться ні на 4, ні на 6.

11. Нехай D — точка на стороні AB трикутника ABC така, що $BD = CD$, а точки E на стороні BC та F на продовженні AC за точку C є такими, що $EF \parallel CD$. Прямі AE та CD перетинаються в точці G . Довести, що BC — бісектриса кута FBG .

12. Нехай $a, b, c \geq 0$. Довести, що

$$\frac{1 + a^2b}{1 + c^2b} + \frac{1 + b^2c}{1 + a^2c} + \frac{1 + c^2a}{1 + b^2a} > 2.$$